(قسمت ششم)

شراره تقی‌دستجردی، صبا قاسمی

استدلال‌های غلطِ درست‌نما

در کلاس درس

سکوت سنگینی کلاس را فراگرفته بود؛ آن‌قدر ساکت که نه‌تنها می‌شد صدای معلم ادبیات کلاس کناری را به‌راحتی شنید، بلکه صدای وزش بادی که نوید آمدن بهار نو را می‌داد هم به خوبی شنیده می‌شد. بچه‌ها مشغول یادداشت نوشته‌های روی تختهٔ کلاس بودند و معلم درحال ورق‌زدن کتاب ریاضی. بعد از گذشت دقایقی معلم کتاب را روی میز گذاشت و کنار تخته ایستاد.

معلم: نوشتید؟ پاک کنم؟

بچه‌ها که تقریباً کارشان تمام شده بود، پاسخ مثبت دادند. معلم گوشهٔ تختهٔ کلاس را پاک کرد، گچ را برداشت و روی تخته نوشت: $x^2 + x + 1 = 0$

سپس به سمت بچه‌ها چرخید و گفت: «در چند جلسهٔ قبل دربارهٔ بعضی از معادله‌ها و روش پیداکردن جواب‌هایشان بحث کردیم. فکر می‌کنم حالا همهٔ شما یاد گرفته‌اید که چگونه جواب چنین معادله‌هایی را به دست آورید. اما آیا همیشه معادله‌ها جواب دارند؟ آیا ممکن است معادله‌ای جواب نداشته باشد؟»

سؤال معلم برای بچه‌ها جالب بود، به طوری که همهمه در کلاس بالا گرفت و به قول معروف بین دانشمندان اختلاف افتاد! معلم که نظاره‌گر این صحنه بود، از بچه‌ها خواست تا سکوت را رعایت کنند و به جای مطرح‌کردن حدس و گمانشان، بکوشند معادلهٔ روی تخته را حل کنند. کلاس دوباره در سکوت فرو رفت.

رها که تا آن موقع ساکت مانده بود و نسبت به جواب سؤال معلم تردید داشت، مشتاقانه دست به قلم شد تا معادله را حل کند. ابتدا چند عدد را در معادله جای‌گذاری کرد: صفر، یک، دو، منفی یک و منفی دو. هیچ کدام جواب معادله نبودند. به سراغ تعدادی از عددهای گویا رفت: $\frac{1}{2}$، $\frac{-1}{2}$ و $\frac{-1}{4}$. نه، این‌ها هم جواب معادله نبودند. اما رها می‌دانست که امتحان‌کردن عددها ممکن است کار بیهوده‌ای باشد، چرا که بی‌شمار عدد هست که باید امتحان کند. پس فکر کرد که بهتر است به سراغ خود معادله برود و کمی با جمله‌های آن بازی کند. هنوز چند دقیقه‌ای نگذشته بود که چشمانش از نتیجهٔ عجیبی که به دست آورده بود، گرد شد. به‌سرعت راه‌حلش را دوباره وارسی (چک) کرد. انگار همه چیز درست بود، به‌جز نتیجهٔ کارش. هر چه بیشتر راه‌حلش را نگاه می‌کرد، بیشتر کلافه می‌شد. آخر چطور ممکن است از حل این معادله نتیجه گرفت: ۳=۰!

رها گیج و خسته از تلاش برای پیداکردن اشتباه راه‌حلش، دستش را بالا برد و با حالتی درمانده و مردد گفت: «اجازه!» معلم سرش را به سوی رها برگرداند و با لبخندی به او اجازهٔ صحبت داد.

رها: راستش من معادله را حل نکردم، ولی به نتیجهٔ خیلی عجیبی رسیدم: هر قدر راه‌حلم را وارسی می‌کنم، متوجه اشتباهم نمی‌شوم، اما مطمئنم که یک جای کارم می‌لنگد!

معلم رها را به‌خوبی می‌شناخت. رها باهوش، باانگیزه و پُرتلاش بود، اما معمولاً هنگام حل مسئله‌ها اشتباه‌های خوبی می‌کرد. به این معنا که بحث در مورد اشتباه‌های او فرصت خوبی را برای فکرکردن و دقت به مفاهیم و استدلال‌های ریاضی در کلاس به وجود می‌آورد. به همین دلیل، معلم از او خواست پای تخته بیاید و راه حلش را برای بچه‌ها توضیح دهد.

رها گچ را برداشت و گفت: «خُب، من اول از همه بررسی کردم که صفر جواب معادله نباشد. معادله را با فرض ناصفر بودن x، بر x تقسیم کردم و به معادلهٔ $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$ رسیدم.»

سپس رها مثل یک معلم باتجربه به سمت هم‌کلاسی‌هایش برگشت و گفت: «بچه‌ها دقت کنید، مهم است که از مخالف صفربودن x اطمینان داشته باشیم، چون می‌دانیم که تقسیم بر صفر توی ریاضی بی‌معناست.»

هم‌کلاسی‌های رها با دقت به صحبت‌هایش گوش می‌دادند، چرا که می‌دانستند باید جایی در استدلال او خطایی رخ داده باشد. رها دوباره به سمت تخته برگشت و صحبت‌هایش را ادامه داد.

رها: از طرف دیگر، می‌شود معادلهٔ اول را به صورت $x + 1 = -x^2$ بازنویسی و در معادلهٔ قبل جای‌گذاری کرد:

$$x + 1 + \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad x + 1 = -x^2$$

$$-x^2 + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = x^2$$

با ضرب‌کردن x در دو طرف معادله به $x^3 = 1$ می‌رسیم و این یعنی $x = 1$ اما اگر در معادلهٔ اول به جای x، ۱ بگذاریم به ۳=۰ می‌رسیم!

دهان بچه‌ها از راه‌حل رها و نتیجهٔ کارش بازمانده بود. رها که نگاه مبهوت هم‌کلاسی‌هایش را دید، به معلمش نگاه کرد تا ببیند نظر او در مورد راه‌حلش چیست.

حتماً شما هم سعی کرده‌اید خطای این استدلال را پیدا کنید. گاهی اشکالات یک استدلال به‌راحتی دیده می‌شوند، اما بعضی وقت‌ها این کار به دقت بیشتری نیاز دارد. برای پیداکردن چنین خطاهایی باید شرایط برداشتن هر گام از استدلال را به‌خوبی وارسی کنیم؛ در شمارهٔ قبل دیدیم که گاهی خطاهای استدلال‌ها از تعمیم نابه‌جای عملیات‌ها ایجاد می‌شود. مثلاً جایز است که تساوی‌ها را با یکدیگر جمع کنیم، ولی اجازه نداریم این کار را برای نامساوی‌ها انجام دهیم. در واقع گفتیم که در دنیای ریاضیات نمی‌شود چشم‌بسته یک نسخه را برای همهٔ عملگرها و مجموعه‌ها تجویز کرد.

منشأ یکی دیگر از این خطاها، حواس‌پرتی ما هنگام تقسیم معادله‌ها بر یک عبارت است. ما معمولاً برای ساده‌سازی معادله‌ها یا نامعادله‌ها آن‌ها را بر عبارت‌هایی تقسیم می‌کنیم، اما همان‌طور که رها اشاره کرد، چون تقسیم بر صفر در ریاضیات تعریف نشده است، قبل از هر چیز باید از ناصفربودن آنچه را که می‌خواهیم بر عبارتمان تقسیم کنیم، اطمینان داشته باشیم. برای اینکه ببینید این خطا به چه نتایج عجیبی منجر می‌شود، به عنوان مثال استدلال زیر را ببینید:

$$a = b$$
$$a^2 = ab$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a+b)(a-b) = b(a-b)$$
$$a+b = b, a = b$$
$$b+b = b$$
$$2b = b$$
$$2 = 1$$

برگردیم به اشکال استدلال رها

برای معنادار بودن یک عبارت جبری باید به این موضوع توجه داشت که به ازای چه مقدارهایی آن عبارت با معناست. مثلاً وقتی می‌نویسیم: $\sqrt{x}$ می‌دانیم که داریم دربارهٔ xهای نامنفی صحبت می‌کنیم؛ چرا که برای ما رادیکال مقدارهای منفی بی‌معناست. یا همان‌طور که اندکی پیش بحث شد، با دیدن $\frac{1}{x}$ بلافاصله باید ناصفربودن x را در نظر بگیریم. بنابراین، رها پس از بازنویسی معادلهٔ اولیه به صورت $x+1=-x^2$ باید به این نکته توجه می‌کرد که اگر قرار باشد xای در این معادله صدق کند، باید کوچک‌تر یا مساوی با منفی یک باشد؛ زیرا:

$$x+1=-x^2\leq 0 \Rightarrow x+1\leq 0 \Rightarrow x\leq -1$$

پس هنگامی که رها به جای عبارت $x+1$ در معادلهٔ $x+1+\frac{1}{x}=0$، عبارت $-x^2$ را جای‌گذاری می‌کند، یعنی دارد جواب معادله را در بازهٔ عددهای کوچک‌تر از ۱- جست‌وجو می‌کند و باید در نظر داشته باشد که اگر معادلهٔ اولیه دارای جواب باشد، این معادله هم دارای جواب است و برعکس. یعنی معادلهٔ اولیه دارای جواب است اگر معادلهٔ اخیر دارای جواب باشد. هم‌ارزی بین این دو معادله را در ریاضی چنین می‌نویسیم:

$$x^2+x+1=0\ ,\ x\leq -1 \Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x}=0\ ,\ x\leq -1$$

به همین ترتیب در هر مرحله معادله را می‌توان با یک معادلهٔ هم ارز جایگزین کرد. اما آنچه باید در نظر داشت محدودهٔ مقادیر مجاز برای x است.

$$x+1+\frac{1}{x}=0, x\leq -1 \Leftrightarrow$$
$$-x^2+\frac{1}{x}=0, x\leq -1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{x}=x^2, x\leq -1 \Leftrightarrow$$
$$1=x^3,\ x\leq -1 \Leftrightarrow$$
$$1=x\ ,\ x\leq -1$$

به همین دلیل، هنگامی که در نهایت به جواب $x=1$ می‌رسیم، این جواب را باید غیرقابل قبول اعلام کنیم؛ زیرا ۱ جزو مقدارهای قابل قبول برای x نیست. به عبارت دیگر، فرض اینکه معادلهٔ اولیه دارای جواب باشد ما را به این تناقض رساند که هم $x=1$ و هم $x\leq -1$. یعنی معادلهٔ اولیه نمی‌تواند جواب داشته باشد.

ادامه دارد ...